

**Exame Final Nacional de Matemática A**  
**Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

**Critérios de Classificação**

9 Páginas

---

**CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO**

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

**ITENS DE SELEÇÃO**

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

**ITENS DE CONSTRUÇÃO**

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota 1** – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

**Nota 2** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... 16 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

### 1.º Processo

Obter  $u_{n+1} = \frac{8n+4}{n+2}$  ..... 3 pontos

Obter  $u_{n+1} - u_n = \frac{12}{(n+1)(n+2)}$  ..... 6 pontos

Referir que  $\frac{12}{(n+1)(n+2)} > 0$ , para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  ..... 5 pontos

Concluir que a sucessão  $(u_n)$  é crescente ..... 2 pontos

### 2.º Processo

Obter  $u_n = 8 - \frac{12}{n+1}$  ..... 6 pontos

Justificar que a sucessão de termo geral  $8 - \frac{12}{n+1}$  é uma sucessão crescente .. 8 pontos

Concluir que a sucessão  $(u_n)$  é crescente ..... 2 pontos

### 3.º Processo

Obter  $u_n = 8 - \frac{12}{n+1}$  ..... 6 pontos

Considerar a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , definida por

$f(x) = 8 - \frac{12}{x+1}$  ..... 2 pontos

Referir que a função  $f$  é crescente em  $]-1, +\infty[$  ..... 3 pontos

Referir que  $(u_n)$  é a restrição a  $\mathbb{N}$  da função  $f$  ..... 3 pontos

Concluir que a sucessão  $(u_n)$  é crescente ..... 2 pontos

### 4.º Processo

Considerar a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , definida por  $f(x) = \frac{8x-4}{x+1}$  ... 4 pontos

Determinar  $f'(x)$  ..... 3 pontos

Concluir que a função  $f'$  não tem zeros ..... 1 ponto

Apresentar um quadro de sinal de  $f'$  e de monotonia de  $f$  ..... 3 pontos

Referir que  $(u_n)$  é a restrição a  $\mathbb{N}$  da função  $f$  ..... 3 pontos

Concluir que a sucessão  $(u_n)$  é crescente ..... 2 pontos

**Nota** – Se for apresentada a derivada da função, de domínio  $\mathbb{N}$ , definida por

$$u(n) = \frac{8n-4}{n+1}, \text{ a classificação a atribuir à resposta é 0 pontos.}$$

1.2. .... 16 pontos

Opção (A)

2. .... 16 pontos

Opção (D)

3.1. .... 16 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por  $a$  o número de bolas azuis e por  $b$  o número de bolas brancas que existiam inicialmente no saco.

**1.º Processo**

Escrever  $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$  ..... 3 pontos

Escrever  $P(B|A) = \frac{1}{3}$  ..... 3 pontos

Escrever  $\frac{b}{a+b-1} = \frac{1}{3}$  ..... 6 pontos

Obter  $a = 2b + 1$  ..... 2 pontos

Concluir que  $a$  é um número ímpar ..... 2 pontos

**2.º Processo**

Escrever  $\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b-1} = \frac{1}{3} \times \frac{a}{a+b}$  ..... 7 pontos

Obter  $a = 2b + 1$  ..... 7 pontos

Concluir que  $a$  é um número ímpar ..... 2 pontos

3.2. .... 16 pontos

Opção (B)

4.1. .... 16 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Seja  $z = \rho e^{i\theta}$ , com  $\rho > 0$

Identificar  $z^2$  com  $\rho^2 e^{i2\theta}$  ..... 1 ponto

Identificar  $\bar{z}$  com  $\rho e^{-i\theta}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\rho^2 e^{i2\theta} = \rho e^{-i\theta}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\rho^2 = \rho \wedge 2\theta = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  ..... 2 pontos

Obter o valor de  $\rho$  ..... 2 pontos

- Resolver a equação  $2\theta = -\theta + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , em ordem a  $\theta$  ..... 1 ponto
- Determinar  $|z_1 - z_2|$ , sendo  $z_1$  e  $z_2$  duas das soluções não nulas da equação  $z^2 = \bar{z}$  ..... 5 pontos
- Reconhecer que o polígono é um triângulo ..... 1 ponto
- Obter o perímetro do polígono  $(3\sqrt{3})$  ..... 2 pontos

**2.º Processo**

Seja  $z = a + bi$ , com  $(a, b) \neq (0, 0)$

- Escrever  $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$  ..... 2 pontos
- Escrever  $\bar{z} = a - bi$  ..... 1 ponto
- Escrever  $a^2 - b^2 = a \wedge 2ab = -b$  ..... 2 pontos
- Resolver a condição  $a^2 - b^2 = a \wedge 2ab = -b$  ..... 3 pontos
- Determinar  $|z_1 - z_2|$ , sendo  $z_1$  e  $z_2$  duas das soluções não nulas da equação  $z^2 = \bar{z}$  ..... 5 pontos
- Reconhecer que o polígono é um triângulo ..... 1 ponto
- Obter o perímetro do polígono  $(3\sqrt{3})$  ..... 2 pontos

**4.2.** ..... **16 pontos**

Opção **(D)**

**5.1.** ..... **16 pontos**

- Determinar as coordenadas do ponto  $A$  ..... 2 pontos
- Determinar as coordenadas do ponto  $B$  ..... 2 pontos
- Determinar  $\overline{AB}$  ..... 4 pontos
- Escrever  $\pi \times \overline{BC}^2 \times \overline{AB} = 10\pi$  (ou equivalente) ..... 4 pontos
- Obter o valor de  $\overline{BC} (\sqrt{2})$  ..... 4 pontos

**5.2.** ..... **20 pontos**

Designemos por  $r$  a reta que passa no ponto  $P$  e é perpendicular ao plano  $ABC$

- Escrever  $(x, y, z) = (3, 5, 6) + k(3, 4, 4)$ ,  $k \in \mathbb{R}$  ..... 5 pontos
- Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta  $r$ , em função de  $k$  ... 3 pontos
- Obter uma equação na variável  $k$ , substituindo  $x$ ,  $y$  e  $z$  na equação do plano  $ABC$  pelas coordenadas de um ponto genérico da reta  $r$  ..... 4 pontos
- Obter o valor de  $k$  ..... 3 pontos
- Obter as coordenadas do ponto pedido  $((0, 1, 2))$  ..... 5 pontos

6. .... 16 pontos

Opção (C)

7.1. .... 16 pontos

Opção (B)

7.2. .... 20 pontos

Apresentar a equação

$\cos(t + 2) + \sqrt{9 - \sin^2(t + 2)} = 0,75(\cos t + \sqrt{9 - \sin^2 t})$  (ou uma equação equivalente) (ver notas 1 e 2) ..... 6 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (ver nota 3) ..... 5 pontos

Apresentar as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) ..... 4 pontos

Apresentar o valor pedido (2,8) ..... 5 pontos

**Notas:**

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho evidenciado.
3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

8. .... 16 pontos

Opção (A)

9.1. .... 16 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Determinar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ..... 8 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln(e^x + 1)}{x}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\ln(e^x + 1)}{x}\right)$  ..... 3 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\ln(e^x + 1)}{x}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$  ..... 1 ponto

Determinar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$  ..... 2 pontos

Obter  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ..... 1 ponto

- Determinar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$  ..... 6 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln(e^x + 1) - x)$  ..... 2 pontos
- Obter  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$  ..... 4 pontos
- Concluir que a equação da assíntota é  $y = x$  ..... 2 pontos

**2.º Processo**

- Referir que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(e^x + 1)) = 0$  ..... 7 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$  ..... 7 pontos
- Concluir que a equação da assíntota é  $y = x$  ..... 2 pontos

**9.2. .... 16 pontos**

- Escrever  $x + \ln(e^x + 1) = 2x + 1$  ..... 1 ponto
- Obter  $e^x + 1 = e^{x+1}$  ..... 4 pontos
- Obter  $e^x = \frac{1}{e-1}$  ..... 5 pontos
- Obter  $x = \ln\left(\frac{1}{e-1}\right)$  ..... 2 pontos
- Obter  $x = -\ln(e-1)$  ..... 4 pontos

**9.3. .... 16 pontos**

Opção (C)

**10.1. .... 16 pontos**

- Determinar  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$  ..... 7 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{\text{sen } x}{1 - e^x}\right)$  ..... 1 ponto
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{\text{sen } x}{1 - e^x}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{1 - e^x}$  ..... 1 ponto
- Escrever  $1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{1 - e^x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 - e^x}$  ... 2 pontos
- Escrever  $1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 - e^x} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^x - 1}$  .. 1 ponto
- Escrever  $1 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}}$  ..... 1 ponto
- Obter  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$  ..... 1 ponto
- Determinar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  ..... 6 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x)$  ..... 1 ponto



Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{y = \frac{1}{x}} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{y^2} \ln \frac{1}{y} \right)$  ..... 2 pontos

Escrever  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{y^2} \ln \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y^2}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y^2} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y}$  ..... 1 ponto

Obter  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$  ..... 1 ponto

Referir que  $g(0) = 0$  ..... 2 pontos

Concluir que a função  $g$  é contínua no ponto  $0$  ..... 1 ponto

**10.2.** ..... **16 pontos**

Determinar  $g'(x)$  em  $]0, +\infty[$  (**ver nota 1**) ..... 4 pontos

Escrever  $g'(x) = 0$  ..... 1 ponto

Determinar o zero de  $g'$  em  $]0, +\infty[$  ..... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de  $g'$  e de monotonia de  $g$  em  $]0, +\infty[$  (ou equivalente) ..... 5 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia da função (**ver nota 2**) ..... 1 ponto

Obter  $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$  ..... 3 pontos

**Notas:**

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. Se for referido que a função  $g$  é decrescente em  $\left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ , em vez de  $\left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ , e crescente em  $\left]\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$ , em vez de  $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.

**COTAÇÕES**

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	<b>5.1.</b>				<b>5.2.</b>				<b>7.1.</b>		<b>7.2.</b>		<b>Subtotal</b>		
Cotação (em pontos)	16				20				16		20		<b>72</b>		
Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	<b>1.1.</b>	<b>1.2.</b>	<b>2.</b>	<b>3.1.</b>	<b>3.2.</b>	<b>4.1.</b>	<b>4.2.</b>	<b>6.</b>	<b>8.</b>	<b>9.1.</b>	<b>9.2.</b>	<b>9.3.</b>	<b>10.1.</b>	<b>10.2.</b>	<b>Subtotal</b>
Cotação (em pontos)	8 x 16 pontos														<b>128</b>
<b>TOTAL</b>															<b>200</b>